11 класс, второй день

1. Некоторые неотрицательные числа a, b, c удовлетворяют равенству $a+b+c=2\sqrt{abc}$. Докажите, что $bc \geqslant b+c$. *(Д. В. Горяшин)*

Решение. Способ 1. Перенесём все слагаемые в левую часть равенства и выделим полный квадрат:

$$a - 2\sqrt{a}\sqrt{bc} + b + c = (\sqrt{a} - \sqrt{bc})^2 + b + c - bc.$$

Следовательно, $bc = b + c + (\sqrt{a} - \sqrt{bc})^2 \geqslant b + c$.

Способ 2. Числа a, b и c неотрицательны, поэтому исходное равенство можно рассматривать как квадратное уравнение относительно $\sqrt{a}$: $(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{bc}\sqrt{a} + b + c = 0$. По условию это уравнение имеет хотя бы одно решение, а значит, $D/4 = bc - b - c \geqslant 0$.

Способ 3. Если $a = 0$, то $b = c = 0$, и неравенство выполнено. Пусть $a > 0$. В силу неравенства о средних имеем $a + b + c \geqslant 2\sqrt{a(b+c)}$. Тогда по условию $2\sqrt{abc} \geqslant 2\sqrt{a(b+c)}$, откуда, разделив на $2\sqrt{a}$ и возведя в квадрат, получаем требуемое неравенство.

Способ 4. По неравенству о средних имеем $a + bc \geqslant 2\sqrt{abc} = a + b + c$, откуда $bc \geqslant b + c$.

2. Волейбольный чемпионат с участием 16 команд проходил в один круг (каждая команда играла с каждой ровно один раз, ничьих в волейболе не бывает). Оказалось, что какие-то две команды одержали одинаковое число побед. Докажите, что найдутся три команды, которые выиграли друг у друга по кругу (то есть A выиграла у B, B выиграла у C, а C выиграла у A). (*Фольклор*)

Решение. Рассмотрим команды A и B, одержавшие одинаковое число побед, и пусть в матче между ними победила команда A. Покажем, что обязательно найдется команда C, которая выиграла у команды A, но проиграла команде B. Рассмотрим все команды, у которых выиграла команда B. Среди них найдётся хотя бы одна команда, которая выиграла у команды A, так как в противном случае с учётом выигрыша у команды B команда A набрала бы больше очков, чем команда B. Таким образом, тройка команд A, B, C удовлетворяет условию задачи.

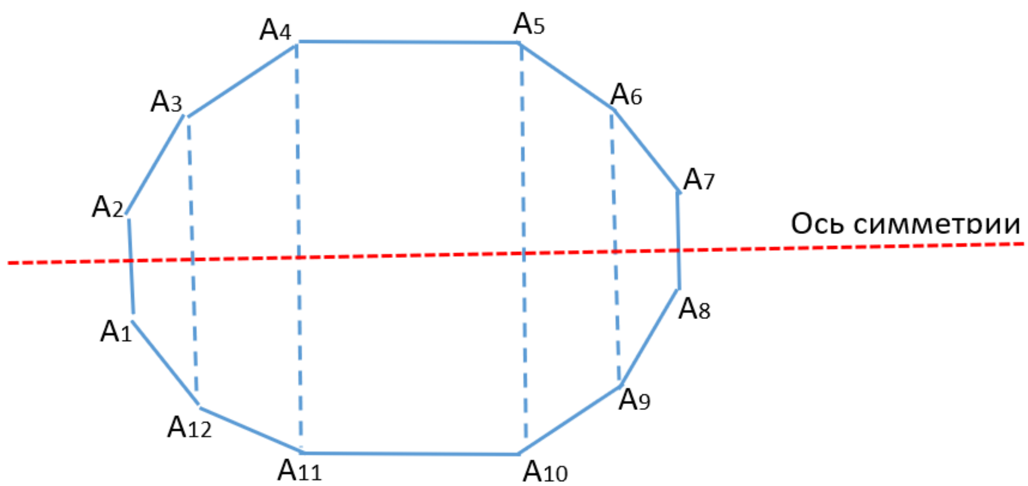
3. В выпуклом 12-угольнике все углы равны. Известно, что дли́ны каких-то десяти его сторон равны 1, а длина ещё одной равна 2. Чему может быть равна площадь этого 12-угольника? (*М. А. Евдокимов*)

Решение. Рассмотрим 12-угольник $A_1A_2\ldots A_{12}$, удовлетворяющий условию задачи. У него десять сторон длины 1 и одна сторона длины 2. Обозначим через x длину оставшейся стороны. Рассмотрим векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\ldots$, $\overline{A_{12}A_1}$, а также коллинеарные им единичные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\ldots$, $\vec{e}_{12}$. Тогда для некоторых i и j имеет место равенство $\vec{e}_1+\ldots+2\vec{e}_i+\ldots+x\vec{e}_j+\ldots+\vec{e}_{12}=\vec{0}$. Помимо того, $\vec{e}_1+\vec{e}_7=\vec{e}_2+\vec{e}_8=\ldots=\vec{e}_6+\vec{e}_{12}=\vec{0}$, поэтому $\vec{e}_1+\vec{e}_2+\ldots+\vec{e}_{12}=\vec{0}$. Вычитая второе из полученных равенств из первого, получаем $\vec{e}_i+(x-1)\vec{e}_j=\vec{0}$. Это возможно лишь в случае, если $\vec{e}_i=-\vec{e}_j$ и $x=2$. Значит в исходном 12-угольнике есть пара параллельных сторон длины 2.

В силу равенства всех углов и соответствующих сторон этот 12-угольник имеет ось симметрии (см. рисунок). Чтобы найти площадь, разобьём его на 4 трапеции и прямоугольник. Находим $A_3A_{12}=A_6A_9=1+\sqrt{3}$, $A_4A_{11}=A_5A_{10}=2+\sqrt{3}$, поэтому искомая площадь равна

$$S=2\cdot(2+\sqrt{3})+\frac{\sqrt{3}\cdot(2+\sqrt{3}+1+\sqrt{3})}{2}+\frac{1+\sqrt{3}+1}{2}=8+4\sqrt{3}.$$

Ответ: $8+4\sqrt{3}$.

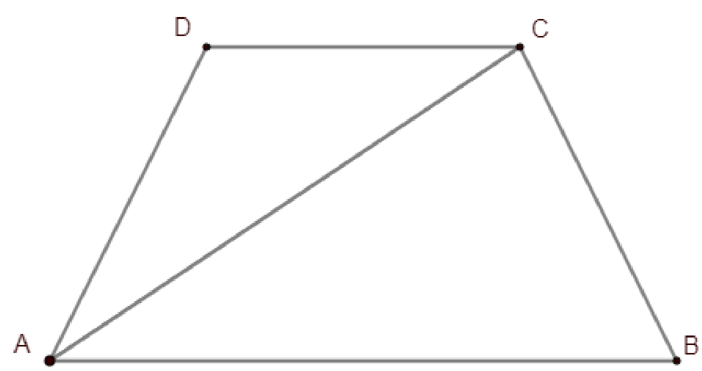


4. В равнобедренной трапеции проведена диагональ. По контуру каждого из получившихся двух треугольников ползёт свой жук. Скорости движения жуков постоянны и одинаковы. Жуки не меняют направления обхода своих контуров, и по диагонали трапеции они ползут в разных направлениях. Докажите, что при любых начальных положениях жуков они когда-нибудь встретятся. (*П. А. Бородин*)

Решение. Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AB > CD$ проведена диагональ AC, так что первый жук ползает по циклу $A \to C \to D \to A$, второй — по циклу $A \to B \to C \to A$. Рассмотрим моменты времени, в которые первый жук оказывается в точке A. За время обхода первым жуком полного цикла из A снова в A второй жук сдвигается по своему циклу на $AB - CD$ в одну и ту же сторону. Поскольку

$$AB - CD < BC + AC - CD = AD + AC - CD < AC + CD + AC - CD = 2AC,$$

при таких сдвигах в один из рассматриваемых моментов времени второй жук окажется на расстоянии меньше $2AC$ до точки A по ходу своего движения, а значит, встретится с первым жуком на диагонали AC.



5. Таня последовательно выписывала числа вида n^7-1 для натуральных чисел $n = 2, 3, \ldots$ и заметила, что при $n = 8$ полученное число делится на 337. А при каком наименьшем $n > 1$ она получит число, делящееся на 2022? (*Т. А. Гарманова*)

Решение. Пусть натуральное число n таково, что $n^7 - 1$ делится на $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$. Тогда $n^7 - 1$ делится на 2 и на 3, поэтому n — нечётное число, имеющее остаток 1 при делении на 3. Помимо того, $n^7 - 1$ делится на 337. Заметим, что если два числа сравнимы по модулю 337 (т. е. дают одинаковые остатки при делении на 337), то седьмые степени этих чисел также сравнимы по модулю 337. Это означает, для нахождения искомого числа достаточно рассмотреть все целые числа n из промежутка $[0; 336]$, удовлетворяющие сравнению $n^7 \equiv 1 \pmod{337}$.

Докажем теперь, что всякое сравнение вида $P_k(n) \equiv 0 \pmod{337}$ имеет не более k решений на отрезке $[0; 336]$, где $P_k(n)$ — многочлен степени k с целыми коэффициентами. Доказательство проведём индукцией по k. При $k = 1$ получаем сравнение вида $an + b \equiv 0 \pmod{337}$, которое имеет не более одного решения, так как любое целое $n \in (0; 336]$ взаимно просто с 337. Пусть утверждение верно для всех многочленов степени $\leqslant k-1$. Рассмотрим многочлен $P_k(n)$. Если он не имеет корней, то утверждение выполнено. Если же у него есть корень, то многочлен можно представить в виде $P_k(n) = (n - a)Q_{k-1}(n)$, а по предположению индукции многочлен $Q_{k-1}(n)$ имеет не более $k - 1$ корней. Утверждение доказано.

Найдём теперь все решения сравнения $n^7 \equiv 1 \pmod{337}$ на отрезке $[0; 336]$. Нам известны два решения: $n_1 = 1$, $n_2 = 8$. Заметим, что если n — решение сравнения $n^7 \equiv 1 \pmod{337}$, то для любого натурального s числа n^s также являются решениями. Следовательно, решениями данного сравнения являются числа

$$8^2 = 64 \equiv 64 \pmod{337},$$
$$8^3 = 512 \equiv 175 \pmod{337},$$
$$8^4 \equiv 8 \cdot 175 \equiv 52 \pmod{337},$$
$$8^5 \equiv 8 \cdot 52 \equiv 79 \pmod{337},$$
$$8^6 \equiv 8 \cdot 79 \equiv 295 \pmod{337}.$$

Итак, мы нашли семь решений на отрезке $[0; 336]$: $n_1 = 1$, $n_2 = 8$, $n_3 = 52$, $n_4 = 64$, $n_5 = 79$, $n_6 = 175$, $n_7 = 295$. По доказанному выше других решений на этом отрезке нет. Из них нечётными и имеющими остаток 1 при делении на 3 являются $n_1 = 1$, $n_5 = 79$, $n_6 = 175$ и $n_7 = 295$. Из них наименьшее, большее 1, есть $n_5 = 79$.

Ответ: 79.